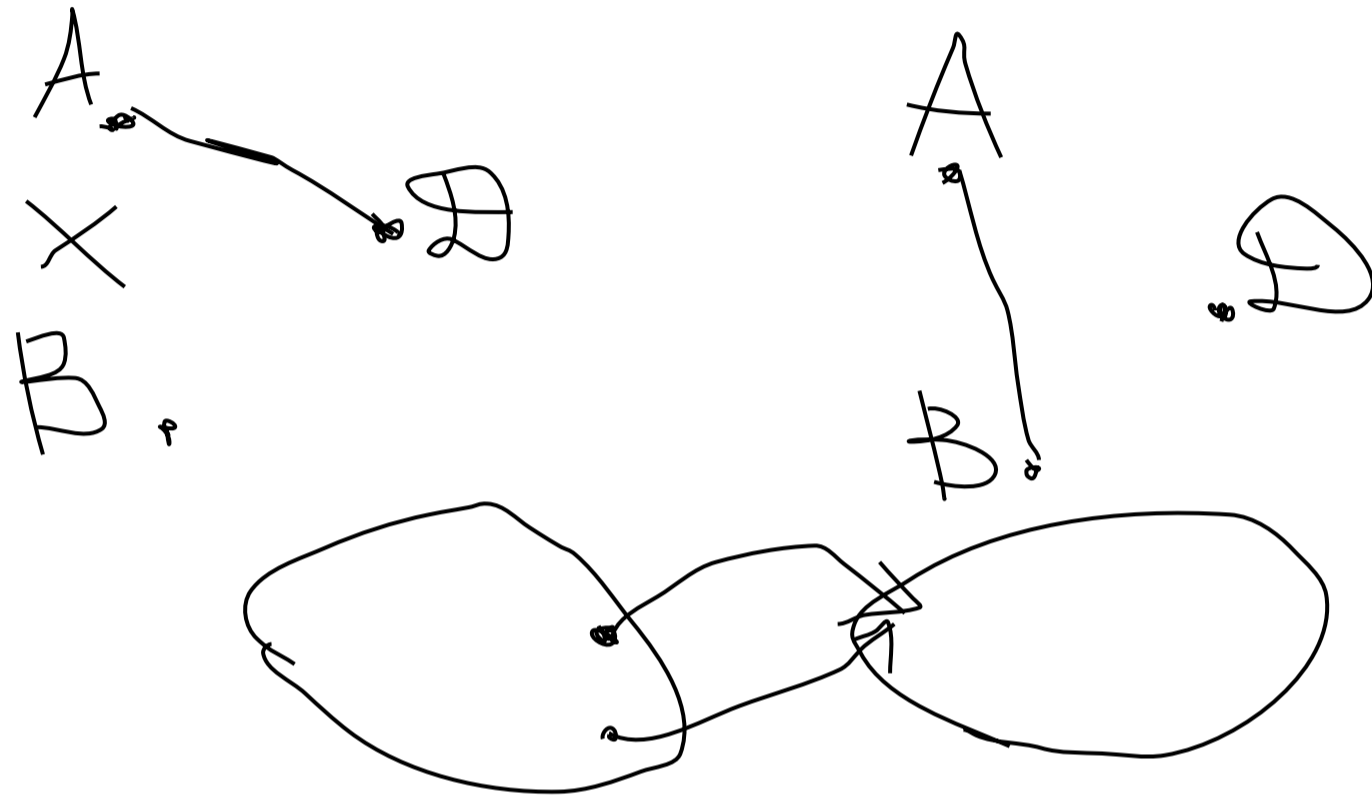


Задача 1.5. Любые два жителя города либо дружат, либо враждуют между собой. При этом известно, что если A друг B , а B друг C , то A также друг C , а также среди любых троих жителей хотя бы двое дружат между собой. Каждый день не более чем один житель может начать новую жизнь: перессориться со всеми своими друзьями и подружиться со всеми своими врагами. Доказать, что все жители города могут подружиться.



Условие

В городе "Многообразие" живут n жителей, любые два из которых либо дружат, либо враждуют между собой. Каждый день не более чем один житель может начать новую жизнь: перессориться со всеми своими друзьями и подружиться со всеми своими врагами. Доказать, что все жители могут подружиться.

Примечание. Если A — друг B , а B — друг C , то A — также друг C . Предполагается также, что среди любых троих жителей хотя бы двое дружат между собой.

Решение

Пусть A , B и C — какие-то три жителя города.

Ясно, что возможен случай, когда все они дружат между собой; возможно также, что один из них (скажем, A) не дружит ни с B , ни с C , а B и C дружат между собой: тогда для того, чтобы A , B и C все подружились, достаточно, чтобы A начал новую жизнь".

Нетрудно также видеть, что два других случая: когда все три жителя A , B и C между собой враждуют и когда один житель, — например, тот же A , — дружит с B и с C , а те враждуют между собой, уже невозможны.

Описанное строение "отношения дружбы" между любыми тремя лицами A , B и C доказывает, что в пределах всего города это отношение можно описать весьма просто: в городе имеются две группы жителей (две партии M и N , такие, что все жители принадлежат либо к одной, либо к другой партии (но никогда — к обеим сразу), причём каждые два члена одной партии между собой дружат, а жители, принадлежащие к разным партиям, обязательно враждуют. В самом деле, присоединим к нашим трем жителям A , B и C города Многообразия еще одного жителя D ; в таком случае, если A и B дружат между собой и D дружит хоть с одним из них, то он дружит и со вторым — и, значит, принадлежит к партии, в которую входят и A , и B ; если же A и B между собой враждуют, то D дружит лишь с одним из них (но с одним дружит непременно!). Это рассуждение обеспечивает возможность разбиения четверки жителей A , B , C и D на две партии M и N (впрочем, одна из этих партий может быть и "пустой": так будет, если все жители A , B , C и D дружат между собой). Поступая так же и дальше, т. е. последовательно присоединяя к уже рассмотренным жителям города по одному человеку, мы докажем возможность разбиения на две партии всех n жителей города.

Теперь доказательство утверждения задачи не представляет уже никакого труда. Если все жители города дружат между собой, то нам и доказывать нечего; если же ни одна из партий M и N не "пуста", то мы предложим каждый день одному из участников партии M "начинать новую жизнь", т. е., попросту, переходить в партию N . Если в партии M имеется k человек, то все жители города смогут подружиться за k дней.